CHAPITRE 1

Géométrie - vectorielle

- Via un smartphone : **scanner** le Qr - CODE.
- Via un ordinateur : **Cliquer** sur laPage Web
- **Recopier** le site (https ://maths-sciences.neocities.org/BTS-VP/vecteur/cours.html)

I Calcul vectoriel

On considère deux points de l'espace : $\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A} \ ; \ y_\mathrm{A} \ ; \ z_\mathrm{A} \right)$ et $\mathrm{B}\left(x_\mathrm{B} \ ; \ y_\mathrm{B} \ ; \ z_\mathrm{B} \right)$

Théorème :

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\left(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} \ ; \ y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A} \ ; \ z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} \right)$
- le milieu I du segment $[\mathrm{AB}]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_\mathrm{B} + x_\mathrm{A}}{2} \ ; \ \frac{y_\mathrm{B} + y_\mathrm{A}}{2} \ ; \ \frac{z_\mathrm{B} + z_\mathrm{A}}{2} \right)$
- si le repère est orthonormal, alors la *norme* ou *longueur* du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est : $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})^2}$

II Égalité de vecteurs

Définition Vecteur égaux

Définition Vecteur opposé

Quels que soient les points A et B, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ est appelé vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Remarque :

Si $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, alors $-\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

IV Somme de deux vecteurs

Si les composantes de $\vec{u}$ sont $\left(\mathrm{X}_u \ ; \ \mathrm{Y}_u \ ; \ \mathrm{Z}_u \right)$ Les composantes de $\vec{v}$ sont $\left(\mathrm{X}_v \ ; \ \mathrm{Y}_v \ ; \ \mathrm{Z}_v \right)$.

On définit le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de la façon suivante :

Alors les composantes du vecteur $\vec{w}$ sont $\left(\mathrm{X}_u + \mathrm{X}_v \ ; \ \mathrm{Y}_u + \mathrm{Y}_v \ ; \ \mathrm{Z}_u + \mathrm{Z}_v \right)$

Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

V Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ un vecteur non nul et k un réel non nul, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ par :

- A, B et C sont alignés,
- si $k > 0$, $\mathrm{AC} = k\mathrm{AB}$ et B et C sont du même côté par rapport à A,
- Si $k < 0$, $\mathrm{AC} = -k\mathrm{AB}$ et B et C sont de part et d'autre de A.

Propriété :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et les réels k et l , on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
- $k(\lambda\vec{u}) = (k.\lambda)\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

V.1 Colinéarité

Définition Vecteur colinéaire

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Propriété :

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires,
- deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.

V.2 Produit scalaire

Définition produit scalaire

On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\left(\ x\ ;\ y\ ;\ z\ \right)$ et $\overrightarrow{v}\left(\ x'\ ;\ y'\ ;\ z'\ \right)$, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le réel :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

Théorème : Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\left(\ x\ ;\ y\ ;\ z\ \right)$ et $\overrightarrow{v}\left(\ x'\ ;\ y'\ ;\ z'\ \right)$, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est noté :

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x.x' + y.y' + z.z'$
2. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

Remarque :

Cette relation peut permettre de déterminer l'angle géométrique entre deux vecteurs connaissant leur norme et leur produit scalaire.

$$\cos(\theta) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}$$

Propriété :

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls et trois points O, A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (OA) et (OB) sont perpendiculaires
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux : on notera $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

V.3 Produit vectoriel

Orienter l'espace, c'est choisir un trièdre de référence $\mathrm{O}xyz$

Tous les trièdres du même type que $\mathrm{O}xyz$ sont dits d'orientatin directe, les autres sont indirects

Définition produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ tel que :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = 0$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires,
  - $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$
  - le sens de $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est tel que le trièdre $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ soit de sens direct

Propriété :

Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\left(\ x\ ;\ y\ ;\ z\ \right)$ et $\overrightarrow{v}\left(\ x'\ ;\ y'\ ;\ z'\ \right)$, le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$:

- $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})|$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \left(\ yz' - zy'\ ;\ zx' - xz'\ ;\ xy' - yx'\ \right)$