CHAPITRE 1

les fonctions à plusieurs variables

- Via un smartphone : **scanner** le Qr - CODE.
- Via un ordinateur : **Cliquer** sur laPage Web
- **Recopier** le site (https ://maths-sciences.neocities.org/BTS-CM/partiel/cours.html)

I Fonction à plusieurs variables

Une fonction **plusieurs variables** correspond à une fonction qui va dépendre de plusieurs variables en même temps.
Par exemple :

- Si nous avons une seule variable (x), nous travaillons avec des fonctions à 1 **Dimension** $\in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \text{ avec } f \in \mathbb{R}$$

- Si nous avons deux variables (x, y), nous travaillons avec des fonctions à 2 **Dimensions**.

$$\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow f(x,y) \text{ avec } f \in \mathbb{R}^2$$

- Si nous voulons représenter notre monde, nous devons avoir 3 variables(x, y , z), nous avons une fonction à 3**Dimensions** .

$$\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow f(x,y,z) \text{ avec } f \in \mathbb{R}^3$$

II Dérivées partielles

Les dérivées obtenues, notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x d'une part, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou f'_y d'autre part sont appelées
dérivées partielles de f.

$$f'(x,y,z) \;=\; f'_x \;;\; f'_y \;;\; f'_z$$

$$f'(x,y,z) \;=\; \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \;;\; \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \;;\; \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

METHODE :

Pour déterminer une dérivée partielle :
- Si nous dérivons par rapport à la variable x, nous partons du principe que les autres variables sont des constantes.
- On fait de même avec les autres variables.

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) \;=\; x^2 + y^2$.
On peut considérer $f(x,y)$ comme une fonction de la variable réelle x ou y.
Dériver la fonction f.

.....
.....
.....

Activité 1 :

- Si $f(x,y,z) = 3xy + y^2 - z^3$, **Déterminer** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$:

.....
.....
.....

- $f(x,y) \;=\; e^x.\cos(y)$**Déterminer** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

.....
.....
.....

- $f(x,y) \;=\; \left(x^2 \;+\; y^2\right).\cos(xy)$**Déterminer** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

.....
.....
.....

-
- $f(x,y) \ = \ \sqrt{1 \ + \ x^2.y^2}$**Déterminer** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

.....
.....
.....

Activité 2 :

- **Déterminer** les dérivées partielles de la fonction $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$
- **Déterminer** les dérivées partielles de la fonction $g(x,y) = x^2.\left(x^2 \ + \ y^2\right)$
- **Déterminer** les dérivées partielles de la fonction $g(x,y) = e^{xy}$
- **Déterminer** les dérivées partielles de la fonction $g(x,y) = e^x \cos(y)$
- **Déterminer** les dérivées partielles de la fonction $h(x,y) = \left(x^2 \ + \ y^2\right)\cos(xy)$
- **Déterminer** les dérivées partielles de la fonction $h(x,y) = \sqrt{1 \ + \ x^2y^2}$

II.1 Le gradient

Le **gradient** noté $\overrightarrow{grad}$ ou $\overrightarrow{\nabla}$ d'une fonction à plusieurs variables représente un **vecteur** qui caractérise la variabilité de cette fonction au voisinage de ce point. Il définit un **champ de vecteurs**. A chaque point, on associe un **vecteur** (champ des vitesses, champ de gravitationnelle, champ électrostatique, mouvement d'un fluide,

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) \ = \ \overrightarrow{grad} f(x,y,z) \ = \ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}.\overrightarrow{u_x} \ + \ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\overrightarrow{u_y} \ + \ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Nous retrouvons cette notion :

- mécanique : Une force conservative dérive d'une énergie potentielle :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} \ = \ \overrightarrow{grad}\ \mathrm{E}_p \quad \Big| \quad \overrightarrow{\mathcal{G}} \ = \ \overrightarrow{grad}\ \Phi_p \quad \Big| \quad \overrightarrow{\mathrm{E}} \ = \ \overrightarrow{grad}\ \mathrm{V}$$

- Loide Fourier : La densité de flux de chaleur ψ :

$$\overrightarrow{\psi} \ = \ -\lambda.\overrightarrow{grad}\mathrm{T}$$

II.2 Le Laplacien

L'opérateur **laplacien** noté Δ :

$$\Delta f(x,y,z) \ = \ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} \ + \ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} \ + \ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}$$