CHAPITRE 5

LIMITES

I Introduction

Une limite en un point a correspond aux valeurs de la fonction lorsque x se rapproche de a. Généralement, nous étudions les limites d'une fonction aux bornes de son domaine de définition. Cette opération, nous donne ainsi les valeurs de limites de notre fonction.
Soit une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle I$\in [a\ ;\ b]$:
Lorsque $\underline{x}$ tend vers $\underline{a}$, $\underline{f(x)}$ se rapproche de $\underline{f(a)}$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Lorsque $\underline{x}$ tend vers $\underline{b}$, $\underline{f(x)}$ se rapproche de $\underline{f(b)}$:

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$$

$f(x)$	x^n $n \in \mathbb{N}$ n pair	x^n $n \in \mathbb{N}$ n impair	$\frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}$	$\ln x$	$\exp x$	$\cos x$	$\sin x$
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$	....	....	....	....	....	....	....
$\lim_{x\to 0^-} f(x)$	....	....	....	....	....	....	....
$\lim_{x\to 0^+} f(x)$	....	....	....	....	....	....	....
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$	....	....	....	....	....	....	....

II Limites finies

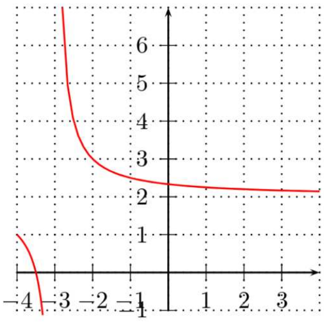
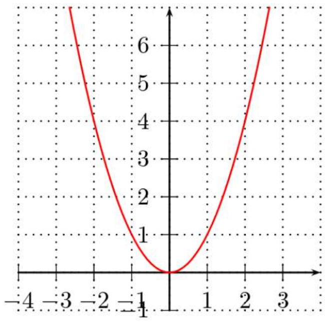
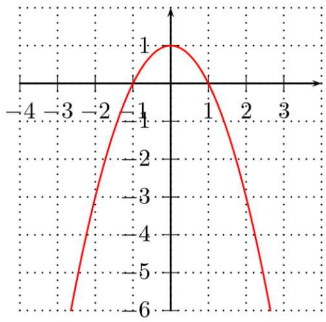
<u>Asymptote horizontal</u>

<u>Définition</u> Asymptote Horizontal

....

....

....

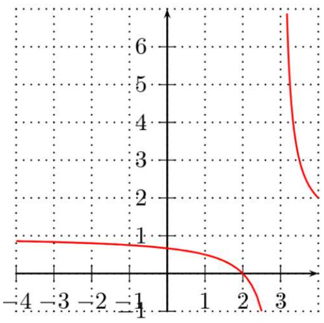
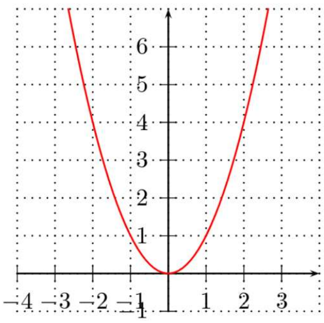
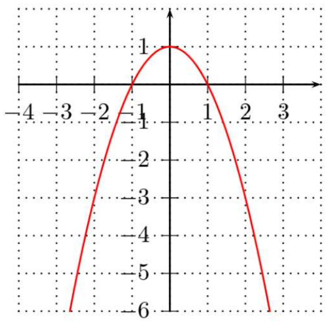




....

....

....

<u>Asymptote vertical</u>

....

....

....

<u>Activité 7 :</u> Limite Soit la fonction f(x) = 3 - $\frac{1}{x+1}$

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers + ∞

....

....

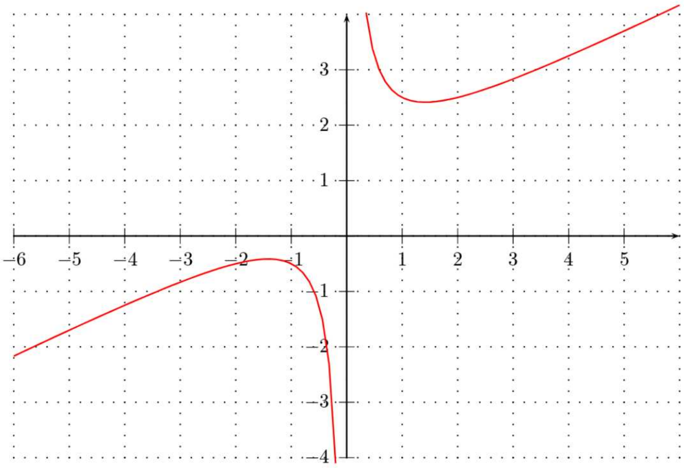
....

III Limites infinie

Limite en $+\infty$:
Définition Asymptote oblique

....
....
....

Activité 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$.



....
....
....

III.1 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.

Limite d'une somme

$\lim\ f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$	....	....	....	....	....

....
....
....

Activité 9 : Calcul de « sommes » de limites :

- $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x^3\right)$=........

....
....
....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x^2\right)$ =...........

....
....
....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x^2\right)$ =...........

....
....
....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + x^3\right)$ =...........

....
....
....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2 + x^3\right)$ =.............

....
....
....

Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	....	....	....	....

Activité 10 : Calcul de « produit » de limites :

- $\lim\limits_{x \to 0} [(e^x + 3) \times (e^x - 2)] =$ ....

....
....
....

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[(x-3) \times \dfrac{1}{x}\right] =$ ....

....
....
....

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[(x-3) \times \dfrac{1}{x}\right] =$ ....

....
....
....

- $\lim\limits_{x \to -\infty} [(x-1) \times x^3] =$ ....

....
....
....

....
....
....

Limite d'un quotient

$\lim\ f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim\ \left(\dfrac{f}{g}\right)$	....	....	....	....	....	....

Activité 11 : Calcul de « quotients » de limites :

- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x+3}{e^x-2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

....

....

....

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

....

....

....

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x-4}{x}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

....

....

....

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

....

....

....

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots$

....

....

....

- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} \right)$ ....

....
....
....

Compositions

Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g[f(x)] = c.$$

<u>**Activité 12**</u> : fonctions composées

Calcul de "composition" de limites :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+3} =$ ....

....
....
....

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x+1) =$ ....

....
....
....

- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+4} =$ ....

....
....
....

III.2 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.
Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappeler les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....

Activité 13 : Formes Indéterminées
Indétermination du type « $\infty - \infty$ » :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - x)$ ....

  ....
  ....
  ....

- On met x^2 en facteur : ....
  ....
  ....
-
  ....

Remarques :

De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dictée par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Activité 14 : Formes Indéterminées
Indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3}\right)$ ....;....

  ....
  ....
  ....

- Pour $x \neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :
  ....
  ....
  ....

....
....

....

Remarques :

De manière générale, le comportement d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est dictée par le comportement du quotient des deux termes de plus haut degré.

Activité 15 : Indétermination du type « $0 \times \infty$ » :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$
- On développe : ....
....
....
- ....

Activité 16 : Indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » :

- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$

....
....

....

- On factorise : ....
....
....
- ....

IV Croissance comparée des fonctions e ; $\ln$ et puissances entières

IV.1 Limites des fonctions exponentielles

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$ ....
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} =$ ....
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$ ....
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x =$ ....

IV.2 Limites des fonctions logarithmes

- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim_{x \to 0} \ln(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour tout nombre réel α strictement positif :

- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^\alpha}\right) = 0.$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^\alpha}\right) = +\infty.$
- $\lim_{x \to -\infty} (e^x.x^\alpha) = 0.$

L'idée à retenir : Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $x \to \ln x$, $x \to x^\alpha$ et $x \to e^x$ prennent des valeurs qui se classent dans cet ordre de la plus petite à la plus grande.

IV.3 Limite d'une fonction

Exercice 36
Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition I des fonctions f(x) :

i. $f(x) = -3x \ avec \ x \in \mathbb{R}$
ii. $f(x) = -x^2 + 1 \ avec \ x \in \mathbb{R}$
iii. $f(x) = 2x^2 + x + 1 \ avec \ x \in \mathbb{R}$
iv. $f(x) = -2\ln(x) \ avec \ x \in]0; +\infty[$
v. $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(x) \ avec \ x \in]0; +\infty[$
vi. $f(x) = -2\exp(x) \ avec \ x \in \mathbb{R}$
vii. $f(x) = x + \sqrt{x} \ avec \ x \in [0; +\infty[$
viii. $f(x) = x.\sqrt{x} \ avec \ x \in [0; +\infty[$

Exercice 37
Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes.

i. $f(x) = x^2 - 2x + 2$
ii. $g(x) = -2x^2 + 4x + 16$
iii. $h(x) = -x^2 - 2x + 15$
iv. $i(x) = 2x^2 - 8x + 6$
v. $j(x) = (3-5x)^2$
vi. $k(x) = -(x-3)(1-2x)$
vii. $l(x) = (4-x^2)(2-x)$
viii. $m(x) = -2x^3 - x^2 + \frac{1}{x}$
ix. $n(x) = \frac{(5-\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$

Exercice 38
Déterminer les limites en $-\infty$ des fonctions suivantes.

i. $f(x) = -2x^3 + x^2$
ii. $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x^2}$
iii. $f(x) = -x^2 - 2x + 15$

Exercice 39
Déterminer les limites en a des fonctions suivantes.

i. $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-3}$ pour $a = 3$
ii. $g(x) = 1x + 2 + \frac{1}{4+x}$ pour $a =$ -4
iii. $h(x) = \frac{1 + x}{4 + x}$ pour $a =$ -4
iv. $i(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{3x - 9}$ pour $a = 3$
v. $j(x) = \frac{3x}{5 - 2x}$ pour $a =$ -$\frac{5}{2}$
vi. $k(x) = \frac{2x}{\sqrt{x + 2}}$ pour $a =$ -4
vii. $l(x) = \frac{5 - x}{\sqrt{x} - 2}$ pour $a = 4$

Exercice 40
Déterminer la limite des fonctions suivantes :

i. $f(x) = \sqrt{e^{3x} - 1}$ pour $a = 0$
ii. $g(x) = \frac{e^x + 3}{e^x + 2}$ pour $a = +\infty$
iii. $h(x) = e^x.sin(x)$ pour $a = -\infty$
iv. $i(x) = e^x - x$ pour $a = +\infty$
v. $j(x) = \ln\left(9 - x^2\right)$ pour $a = 3$
vi. $k(x) = \ln(1 - \ln(x))$ pour $a = e$
vii. $l(x) = x - \ln(x)$, $a = +\infty$

viii. $m(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$, $a = 0$

ix. $n(x) = \left(2.x^3 - 4x^2\right).e^{-x}$ pour $a = -\infty$

x. $n(x) = \left(2.x^3 - 4x^2\right).e^{-x}$ pour $a = +\infty$

xi. $o(x) = \frac{e^{3x} - 1}{x}$ pour $a = 0$

xii. $o(x) = \frac{e^{3x} - 1}{x}$ pour $a = -\infty$

xiii. $o(x) = \frac{e^{3x} - 1}{x}$ pour $a = +\infty$

Exercice 41
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty;3[\cup]3;-\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 7}{x - 3}$

i. **Donner** le domaine de définition de la fonction $f(x)$

ii. **Déterminer** les trois réels $a;b;c$ tels que pour tout x différent de 3, on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$

iii. **Dire** si la fonction $f(x)$ présente une asymptote d'équation $y = 2x + 3$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 42
Mise en situation

i. Un routier doit faire un trajet de 150 km. Si sa vitesse moyenne est $v\ en\ (km.h^{-1})$, alors sa consommation en gas-oil est $6 + \frac{v^2}{300}$ litres par heure.
Le gas-oil est de 0,6 euros le litre et le chauffeur est payé 11 euros de l'heure.

ii. **Déterminer** la vitesse moyenne v_0 pour laquelle le coût du trajet est minimal et calculer ce coût.
Remarque : il est raisonnable de penser que v peut varier de 30 à 100 $km.h^{-1}$

iii. **Déterminer** les asymptotes de la courbes représentant la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2190}{v} + 0,3v$$

Exercice 43
Déterminer les limites suivantes :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3x^2 + 4x + 1\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to2^-} \left(\frac{x+3}{x^2-4}\right)$

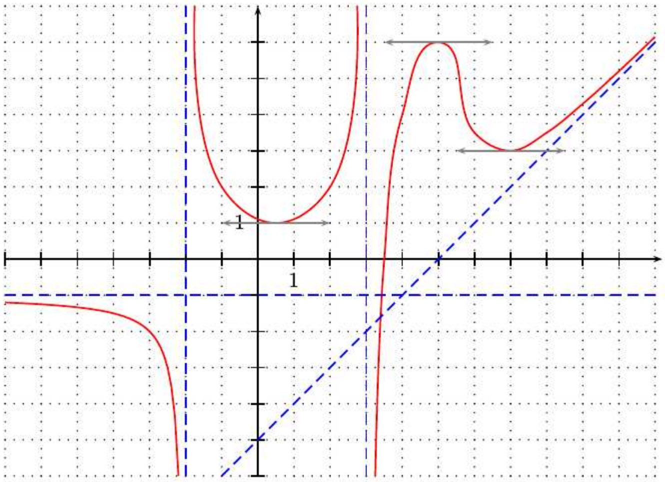
iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - 5x^4 + 3x - 1}{x^4 - x^2 - 1}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 + \ln x\right)$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{x^3}{e^x}\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x + e^{-x} + \sqrt{2 - 3x}\right)$

Exercice 44
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]-2\,;\,3\,[\,\cup\,]\,3\,;+\infty\,[$.
On a tracé sur le graphique les asymptotes à $\mathcal{C}_f$ (droites en pointillés), ainsi que les tangentes



horizontales.

i. À l'aide des indications ci-dessus, déterminer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ii. Combien la courbe admet-elle d'asymptotes ? Donner une équation de chacune d'elle.

iii. Établir le tableau de variation complet de f. (avec le signe de la dérivée ainsi que les limites).

Exercice 45

Soit f la fonction définie sur $]\ 1\ ;+\infty\ [$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\ ; \overrightarrow{j}\ ; \overrightarrow{k})$.

i.A. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

B. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

C. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, en donner les équations.

ii.A. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme que $f(x) = 4 + x + \dfrac{5}{x - 1}$.

B. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

iii. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.