CHAPITRE 4

Les fonctions ln(x) et exp(x)

I Fonction logarithme

Définition Fonction logarithme :

....
....
....

Conséquences directes :

- $\ln(1) = 0$,
- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :

- $\ln(ab) =$ ....
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) =$ ....
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) =$ ....
- $\ln(a^n) =$ ....
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) =$ ....

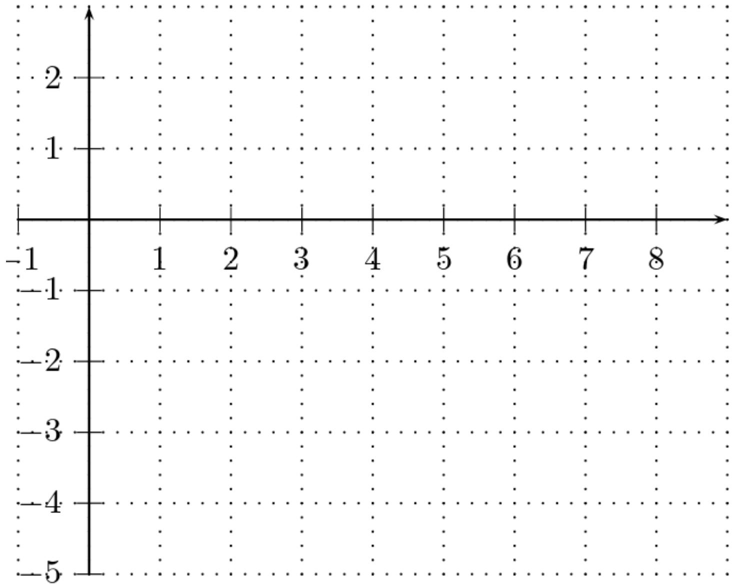
En résumé, le logarithme népérien à la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Activité 5 :

Transformations d'expressions numériques et algébriques :

- $\ln\left(\dfrac{192}{108}\right) =$...
- $\ln(\sqrt{96}) =$...

- $\ln(x+3) + \ln(2x+1) =$...



II Fonction exponentielle

Définition Fonction exponentielle

....
....
....

Remarques :

On dit que la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme, ce qui signifie que graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$) dans un repère othonormal.

Conséquences directes :

- $\exp(x) > 0$.
- $\exp(1) = e^1$.
- $\ln(e^x) =$ ....
- $e^{\ln x} =$ .... pour $x > 0$.
- $x \in \mathbb{R}$ et $y = e^x \iff y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(y) = x$.

Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :

- $e^{a+b} =$ ....
- $\dfrac{1}{e^a} =$ ....
- $\dfrac{e^a}{e^b} =$ ....
- $(e^a)^n =$ ....

En résumé, l'exponentielle à la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances. (inversement au logarithme !).

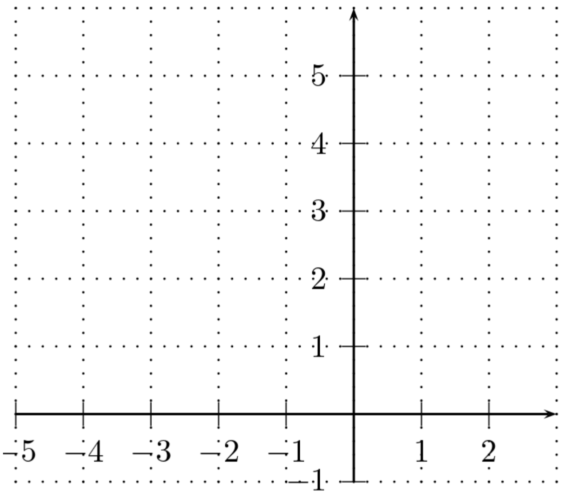
Activité 6 :

Transformations d'expressions numériques et algébriques :

- $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3}$ =..
- $e^{x+3} \times e^{2x+1}$ =..
- $(e^{x-2})^2$=..

Conséquence : La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exp.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' = e^x$.



III Exercices

III.1 Logarithme népérien et exponentielle

III.2 Transformations d'écritures

Simplifier les expressions suivantes. **Marquer** les formules utilisées.

i. $e^{5\ln x}$

ii. $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}}$

iii. $e^2.e^3.\frac{1}{e^4}.(e^{-2})^{-3}$

iv. $(e^{-x})^3$

v. $e^x.e$

vi. $\frac{e^{3x}}{e^{-x}}$

vii. $\sqrt{e^{-2x}}$

viii. $ln(5)^2 - ln(4)$

i. Simplifier $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

ii. Simplifier $4\ln(\sqrt{2}+1) - 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2$

III.3 Résolution d'équations et d'inéquations

i. $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

ii. $(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0$

iii. $ln(3+x) \;=\; ln(3) \;+\; ln(x)$

iv. $ln(3x) \;=\; 3ln(x)$

v. $ln(x) \;+\; ln(x-2) \;=\; ln(x-10)$

vi. $ln(2x+1) \;=\; ln(3) + ln(1-x)$

vii. $ln(x-1) \;+\; ln(x-3) \;=\; ln(3)$

viii. $1000.(1,04)^n \;=\; 4500$

ix. $ln(x+3) + ln(x-1) \;=\; 2ln(2)$

x. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $2,1^n \leqslant 3200$

Exercice 30
Simplifier les expressions.

i. ln(3) + ln(5)

ii. ln(2) + ln(4x) - ln(x)

iii. ln(4) + ln(2)

iv. ln(x) - ln(4x) - ln(2x) = 2 ln(2)

v. ln(1) - ln(4) + ln(5) =

vi. 2.ln(x) - ln(4x) + ln(2x) = 2 ln(2)

vii. ln(x+1) + ln(x-1) = 0

viii. ln(x+1) - ln(2x-1) = 0

ix. ln(2x+1) + ln(3x-2) = 0

x. ln(2x+1) - ln(x+1) + ln(x+2) = 0

Dans chaque exercice, mettre l'équation ou l'inéquation sous la forme $ln(a) = ln(b)$

Exercice 31

- $\ln(x+2) \;=\; 2\ln(x)$
- $\ln(2x+3) \;+\; \ln(3) = \; 2\ln(x)$
- $\ln(x)\ln(x+2) \;=\; 2\ln(9x-12)$
- $\ln(x-2) = 3$
- $\ln(x+4) = 2.\ln(x+2)$
- $\ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(x+13)$
- $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$

Exercice 32

Exponentielle

Simplifier les écritures suivantes

- $(e^x)^3.e^{-2x}$
- $\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$
- $\frac{e^x e^{-x}}{e^x}$
- $e^{-x}.e^2$

Exercice 33

Résoudre **Résoudre** les équations suivantes :

- $e^{3-x} = 1$
- $e^{2x+1} = \; e^{7x+2}$
- $2.e^{-x} \;=\; \frac{1}{e^x+2}$
- $(e^x)^3 = e^8$
- $e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 34
Exponentielle en physique *Décharge d'un condensateur dans un résistor* La tension V(t) aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi

$$\mathrm{V}(t) = \mathrm{V}_0 e^{\left(\frac{-t}{\mathrm{RC}}\right)}$$

- V_0 : est la tension initiale
- R : résistance du résistor
- C : la capacité du condensateur

On donne C = 12F(microfarads.
Calculer R en ohm, sachant que la tension est tombée au $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes

Exercice 35
Radioactivité Un corps radioactif se désintégre en transformant une partie de ses noyaux suivant la loi

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}_0 e^{(-t.k)}$$

- N_0 : le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation
- $\mathrm{N}(t)$: le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures
- k : une constante réelle

i. **Déterminer** la constante k pour le Thorium, sachant qu'avec $\mathrm{N}_0 = 1\ 000$, on a $\mathrm{N}(1) = 937$. Arrondir 10^{-3}

ii. La période d'un élément radioactif est le temps au bout duquel il reste la moitié de ses atomes**Calculer** la période du thorium. Arrondir à la minute.