CHAPITRE 2

Développements limités

- Via un smartphone : **scanner** le Qr - CODE.
- Via un ordinateur : **Cliquer** sur laPage Web
- **Recopier** le site (https ://maths-sciences.neocities.org/BTS-CM/dev-limite/cours.html)

I Introduction

Nous parlons de **développement limité** à l'ordre n au voisinage d'un point a s'il existe des réels ou des complexes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$f(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1 \;+\; a_2(x \;-\; x_a)^2 \;+\; \ldots \;+ a_n(x \;-\; x_a)^n \;+\; \mathrm{R}este(x)$$

$$f(x) \;=\; \mathrm{T}_n(x) \;+\; \mathrm{R}este(x)$$

$\mathrm{T}_n(x)$ représente une **fonction polynomiale** ou **polynôme de Taylor**.
Ainsi le **polynôme de Taylor** de la fonction $f(x)$ est donnée par l'expression :

$$\mathrm{T}_n(x) \;=\; f(a) \;+\; f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Un **développement limité** est composé :
- d'une **fonction polynomiale** dont le degré est appelé l'ordre du développement (n)
- d'un **reste** ($\varepsilon(x)$) qui peut être négligé lorsque la variable est suffisamment proche du point considéré.

$\varepsilon(x)$:

Le **reste** représente l'écart entre la fonction réelle et la fonction **polynomiale**

En **physique**, il est courant de confondre la fonction avec son **développement limité**, à condition que le reste ($\varepsilon(x)$) soit inférieure à l'erreur autorisée.

En **mathématiques**, les **développements limités** permettent de trouver plus simplement des **limites**, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes.
Si l'on se contente d'un développement d'ordre 1, on parle d'**approximation linéaire** ou d'**approximation affine**.

II Développement limite

THÉORÈME :
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in \mathrm{I}$. Alors pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a :
$f(x) = f(a) \ + \ f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

ε est une fonction définie sur I telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

NOTATION :

- $n!$ se dit **n factorielle**, cela représente le produit des entiers strictements positifs inférieurs ou égaux à n.

$$n! \ = \ 1 \ \times 2 \ \times \ 3 \ \ldots \ (n-2) \times (n-1) \times \ n$$

- $0! \ = \ 1$ et $1! \ = \ 1$

II.1 Développement limité d'ordre 1

L'ordre correspond à la lettre n, donc si on parle d'un **développement limité** d'ordre 1 cela signifie que $n = 1$.
Vous avez déjà entendu parler d'un **développement limité** d'ordre 1.
Où avez-vous déjà utilisé un **développement limité** à l'ordre 1.

.....
.....
.....

Activité 3 : Développement limité d'ordre 1 :

Déterminer les DL d'ordre 1 au voisinage de a pour les fonctions suivantes :

1. f(x) = x^2 pour a = 2
2. g(x) = x^3 pour a = 4
3. e(x) = $5x^5 \ + \ 3x^3 \ + \ 2$ pour a = 5

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

II.2 Développement limité d'ordre 3

Activité 4 : Donner le **developpement limité** d'ordre 3 de la fonction $f(x) = e^x$ pour a = 0

.....
.....
.....

Activité 5 : **Developpement limité** d'ordre 3 de la fonction logarithme népérien

1. **Donner** le **développement limité** d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \ln(x)$ pour a = 0

   .....
   .....
   .....

   Expliquer votre constat.

   .....
   .....
   .....

2. **Donner** le **developpement limité** d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$ pour a = 0

   .....
   .....
   .....

III Dévéloppements limités

III.1 Généralités

Théorème :
Si f admet un **développement limité** à l'ordre n en a si et seulement si la fonction définie par $g(h) = f(x + a)$ admet un **développement limité** à l'ordre n en 0
Remarques :

Pour simplifier le calcul, il suffit de faire le **développement limité** en 0 d'une fonction g(X).
Un changement de variable va être effectué pour obtenir le **développement limité** en a. On pose : X $= x - a$
Cette remarque montre l'importante d'effectuer le **développement limité** en 0.

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

ou sous forme développée

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

On dit que $\mathrm{P}_n(x)$ est la partie régulière du développement limité et $x^n\varepsilon(x)$ est le reste.

III.2 Dévéloppements limités usuels

Au voisinage de zéro, on a :

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n\varepsilon(x).$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^n\varepsilon(x).$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x$

Remarques :

La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (respectivement impaire) est un polynôme constitué de monômes de degré pair (respectivement impair).

Dans le reste du chapitre, on considère les fonctions f et g admettant à l'ordre n au point 0 des développements limités de parties régulières $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{Q}(x)$.

III.3 Opérations algébriques

- $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)$.
- $f\times g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière $\mathrm{P}(x)\times\mathrm{Q}(x)$ en supprimant tous les termes de degré strictement supérieurs à n.

Activité 6 :

Donner le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III.4 Composition

Si $f(x)=\mathrm{P}(x)+x^n\varepsilon(x)$ alors :

- $f(ax)=\mathrm{P}(ax)+x^n\varepsilon_1(x)$ pour tout $a\in\mathbb{R}^*$.
- $f(x^p)=\mathrm{P}(x^p)+x^{n\times p}\varepsilon_2(x)$ pour tout $p\in\mathbf{N}^*$.

Activité 7 :

Donner le développement limité à l'ordre 7 de $\sin(2x)$:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Activité 8 :

Donner le **développement limité** à l'ordre 6 de $\dfrac{1}{1+x^2}$:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 1
Donner le developpement limité de f en 0 à l'ordre n :

1. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ pour n = 5
2. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ pour n= 7
3. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(1+x)}$ pour n = 3
4. $f(x) = \sqrt{1 + x}$ pour n = 4
5. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(1+x)^2}$ pour n = 3
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ pour n = 4

Exercice 2
Donner le développement limité d'ordre 3 des fonctions $f(x)$ au voisinage de a

1. $f(x) = \sqrt{x}$ pour a = 1
2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ pour a = 1

Exercice 3
Limite

1. **Déterminer** la limite de $\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x}$
2. **Déterminer développement limité** à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction e^x
3. **Exprimer** la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x}$ avec le **développement limité** précédent.
4. **Déterminer** maintenant la limite de $\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x}$ avec l'expression précédente.

Exercice 4
Limite

1. **Déterminer** la limite de $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
2. **Déterminer développement limité** à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction e^x
3. **Exprimer** la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x}$ avec le **développement limité** précédent.
4. **Déterminer** maintenant la limite de $\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x}$ avec l'expression précédente.

Exercice 5
Limite

1. **Déterminer** la limite de $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$
2. **Proposer** une méthode permettant de déterminer la limite de $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$
3. **Exprimer** la fonction $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ avec le **développement limité** d'ordre 3 au voisinage de 0.
4. **Déterminer** maintenant la limite de $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.