CHAPITRE 8

Primitives - intégrales

- Via un smartphone : **scanner** le Qr - CODE.
- Via un ordinateur : **Cliquer** sur laPage Web

- **Recopier** le site (https ://maths-sciences.neocities.org/BTS-CM/Primitive/cours.html)

I Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant

$$\mathrm{F}'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Activité 30 : :
Considérons la fonction f définie sur **R** par $f(x) = 3x^2$.
- Soit fonction F définie sur **R** par $\mathrm{F}(x) = x^3$. **Déterminer** $\mathrm{F}'(x)$.
  ....
- Soit fonction G définie sur **R** par $\mathrm{G}(x) = x^3 + 2$. **Déterminer** $\mathrm{F}'(x)$.
  ....
- Soit fonction H définie sur **R** par $\mathrm{G}(x) = x^3 + 5$. **Déterminer** $\mathrm{H}'(x)$.
  ....
- Que constatez vous par rapport à toutes dérivées ?
  ....
- **Déterminer** une primitive de la fonction $3x^2$.
  ....

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, C un réel, $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbf{R}$ fixés.
- Si f est dérivable sur I, alors f possède au moins une primitive sur I.
- Si f admet une primitive F sur I, les primitives de f sont les fonctions du type $\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ où C est une constante.
- Si f est dérivable sur I, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $\mathrm{C} = \mathrm{F}(x_0) = y_0$.

I.1 Calculs de primitives

L'objet de ce paragraphe est de présenter quelques techniques simples permettant l'obtention de primitives de fonctions données sur un intervalle déterminé.

Primitives des fonctions usuelles

Obtention de primitives par lecture inverse du tableau des dérivées :

$f(x)$	une primitive $\mathrm{F}(x)$	conditions
0	$Constante$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}$
a	$ax + Constante$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}$
$a.x^n$	$\dfrac{a.x^{n+1}}{n+1} + Constante$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + Constante$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}^*$
$\dfrac{a}{x^2}$	$-\dfrac{a}{x} + Constante$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + Constante$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}$
e^x	e^x	$\mathrm{I} = \mathbf{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}_+^*$
$\dfrac{a}{x}$	$a.\ln x$	$\mathrm{I} = \mathbf{R}_+^*$

Remarque :

Pour obtenir toutes les primitives d'une fonction f donnée, il suffit de rajouter une constante.

Activité 31 : :

- **Déterminer** une primitive de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^8$.
- **Déterminer** une primitive de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^8}$.
- **Déterminer** une primitive de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^4$.
- **Déterminer** une primitive de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Opérations sur les primitives

u et v sont des fonctions de primitives U et V sur un intervalle I.
Tableau des opérations sur les primitives :

Forme de la fonction	Une primitive	Conditions
$u+v$	$\mathrm{U}+\mathrm{V}$	
$k \times u$	$k \times \mathrm{U}$	
$u' \; u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbf{N}$
u^n	$\dfrac{u^{n+1}}{u'(n+1)}$	$n \in \mathbf{N}$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$-\dfrac{1}{(n+1)\; u^{n+1}}$	$n \in \mathbf{N}^*$
$\dfrac{a}{u^n}$	$-\frac{a}{u'}.\dfrac{1}{(n+1)\; u^{n+1}}$	$n \in \mathbf{N}^*$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x)>0$
$\dfrac{a}{\sqrt{u}}$	$2.a.\sqrt{u}.\frac{1}{u'}$	$u(x)>0$
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	
$u'e^u$	e^u	
$a.e^u$	$\frac{a.e^u}{u'}$	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$
$\dfrac{a}{u}$	$\frac{a}{u'}.\ln u$	$u(x)>0$

<u>Activité 32 :</u> :
On cherche à déterminer dans chacun des cas suivant une primitive F de le fonction f sur l'intervalle I :

- $f(x) = 4x^5$ et $\mathrm{I} = \mathbf{R}$

$$\mathrm{F}(x) = 4 \times \frac{x^6}{6} = \frac{4.x^6}{6} + \mathrm{C}$$
$$\mathrm{F}(x) = \frac{2.x^6}{3} + \mathrm{C}$$

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$\mathrm{F}(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{C}$ $a.x^n$ donne $\dfrac{a.x^{n+1}}{n+1}$ avec $a=2$ et $n=2$

- $f(x) = 2x - \frac{3}{x^2}$

$\mathrm{F}(x) = x^2 + \frac{3}{x} + \mathrm{C}$ $a.x^n$ donne $\dfrac{a.x^{n+1}}{n+1}$ avec $a=1$ et $n=1$

- $f(x) = (x+2)^4$

$u' \; u^n$ donne $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ avec $u = x + 2$ et $n=4$

$\frac{u^{n+1}}{n+1}$ donc $\frac{(x\ +\ 2)^{4+1}}{4+1}\ +\ \mathrm{C}\ =\ \frac{(x\ +\ 2)^{5}}{5}\ +\ \mathrm{C}$ w

- $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x\ -\ 6}}$ et $x > 2$

  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ donne $2\sqrt{u}$ avec $u\ =\ 3x\ -\ 6$ et $u' = 3$

  $2\sqrt{u}$ donc $2\sqrt{3x\ -\ 6}$

  $f(x) = \frac{(3x-6)'}{\sqrt{3x-6}}$ donc $\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{3x-6}\ +\ \mathrm{C}$.

- $f(x) = \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2\ -\ x\ +\ 1}}$ et $\mathrm{I} = \mathbf{R}$:

  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ donne $2\sqrt{u}$ avec $u\ =\ 2x^2\ -\ x\ +\ 1$ et $u' = 4x-\ 1$

  $2\sqrt{u}$ donc $2\sqrt{2x^2\ -\ x\ +\ 1}$

  $f(x) = \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2\ -\ x\ +\ 1}}$ donc $\mathrm{F}(x)\ =\ 2\sqrt{2x^2\ -\ x\ +\ 1}\ +\ \mathrm{C}$.

- $f(x) = 2x + 2\cos(2x) - 6\sin(3x-1)$ et $\mathrm{I} = \mathbf{R}$: $f(x) = 2x + (2x)'\cos(2x) - 2(3x-1)'\sin(3x-1)$

  donc $\mathrm{F}(x) = x^2 + \sin(2x) + 2\cos(3x-1)$.

- $f(x) = 2x\left(x^2\ -\ 1\right)^5$ et $\mathrm{I} = \mathbf{R}$:

  $u'\ u^n$ donne $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ avec $u\ =\ x^2\ -\ 1$ et $n = 5$

  $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ donc $\frac{\left(x^2\ -\ 1\right)^{5+1}}{5+1}$

  $f(x) = (x^2-1)'(x^2-1)^5$ donc $\mathrm{F}(x) = \frac{\left(x^2\ -\ 1\right)^6}{6}\ +\ \mathrm{C}$.

- $f(x) = -9\ e^{-3x\ -\ 1}$ et $\mathrm{I} = \mathbf{R}$:

  $a.e^u$ donne $\frac{e^u}{u'}$ avec $u\ =\ -3x\ -\ 1$ donc $u' = 3$ et $a = 9$

  $\frac{a.e^u}{u'}$ donc $\frac{9.e^{-3x\ -\ 1}}{3}$

  $f(x) = 3(-3x-1)'e^{-3x-1}$ donc : $\mathrm{F}(x) = 3\ e^{-3x-1}\ +\ \mathrm{C}$.

- $f(x) = \frac{4x\ -\ 2}{x^2\ -\ x\ +\ 3}$ et $\mathrm{I} = \mathbf{R}$:

  $\frac{1}{u}$ donne $\frac{1}{u'}.\ln u$ avec $u\ =\ x^2\ -\ x\ +\ 3$ donc $u'\ =\ 2x\ -\ 1$

  $\frac{1}{u'}.\ln u$ donc $\frac{4x\ -\ 2}{2x\ -\ 1}.\ln\left(x^2\ -\ x\ +\ 3\right)$

  $f(x) = \frac{2(x^2-x+3)'}{x^2-x+3}$ donc : $\mathrm{F}(x) = 2\ln(x^2-x+3)\ +\ \mathrm{C}$.

- $f(x)\ =\ (3x\ -\ 1)^3$

- $f(x)\ =\ \frac{4}{x}\ -\ 5.e^{2x}$

  - $a.e^u$ donne $\frac{e^u}{u'}$ avec $u\ =\ 2$ donc $u' = 2$ et $a = 5$

    $\frac{a.e^u}{u'}$ donc $\frac{5.e^{2x}}{2}$

- $\frac{a}{x}$ donne $a.\ln x$ avec $a = 4$
  $a.\ln x$ donc $\mathrm{F}(x) = 4.\ln x + \mathrm{C} = \ln(x)^4 + \mathrm{C}$

$\mathrm{F}(x) = \ln(x)^4 - \frac{5.e^{2x}}{2}$

II Intégrale d'une fonction

Définition

On appelle intégrale de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Methode de calcul :

Activité 33 : :

Calculer l'intégrale : $\int_2^3 x\ dx$:

....
....
....

Remarque :

- L'intégrale d'une fonction f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ est indépendante du choix de la primitive F.
- On note aussi $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.
- Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$, la variable x est « muette », ce qui signifie que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \dots$
  Le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : x, ou t.